Diskrete Mathematik

Andreas Paffenholz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WiSe 2022/23
20. Oktober 2022
Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1.1: Türme von Hanoi

In dem Spiel *Türme von Hanoi* ist ein Brett mit drei senkrechten Stäben gegeben, und auf einem Stab sind k Scheiben aufgesteckt, deren Durchmesser nach oben strikt abnehmen. In jedem Zug können Sie die oberste Scheibe von einem Stab nehmen und auf einen anderen stecken, solange ihr Durchmesser kleiner ist als der der Scheiben, die schon dort stecken (falls dort schon Scheiben sind). Ziel ist es, die Scheiben alle auf einen anderen Stab zu bringen (wieder mit absteigendem Durchmesser, was durch die Regeln aber erzwungen wird).

1. Wieviele gültige Stellungen gibt es?
2. Wieviele Züge brauchen Sie mindestens, um den Turm umzuschichten?

Aufgabe 1.2: Schubfächer

Zeigen Sie, dass Sie unter 55 beliebig ausgewählten Zahlen aus dem Bereich $\{1, 2, \ldots, 100\}$ immer zwei Zahlen a, b finden, so dass $b - a = 9$. Geht es auch mit weniger?

Aufgabe 1.3: Schubfächer II

Seien $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}_{>0}$ eine endliche Folge natürlicher Zahlen. Für $1 \leq m \leq n \leq k$ bezeichnen wir mit a_{mn} die Summe der aufeinanderfolgenden Folgenglieder von a_m bis a_n, also

$$a_{mn} := a_m + \cdots + a_n .$$

Zeigen Sie, dass mindestens eine der Zahlen a_{mn} durch k teilbar ist.

Hinweis: Betrachten Sie a_{1n} für $1 \leq n \leq k$ und ggf. auch die Reste bei ganzzahliger Division dieser Zahlen durch k.

Aufgabe 1.4: Die Eulersche φ-Funktion

Die Eulersche φ-Funktion ist

$$\varphi(n) := |\{k \mid 1 \leq k \leq n,\ k \text{ relativ prim zu } n\}| .$$

- Zeigen Sie

$$\varphi(n) \;=\; n \cdot \prod_{p \text{ Primteiler von } n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) .$$

Hinweis: Inklusion-Exklusion.

- Zeigen Sie

$$n \;=\; \sum_{d|n} \varphi(d) \;=\; \sum_{d|n} \varphi(\frac{n}{d}) .$$

Hinweis: Teilen Sie für die erste Gleichung die Zahlen in $[n]$ danach ein, wie groß ihr ggT mit n ist, und bestimmen Sie die Größe dieser Mengen.

Aufgabe 1.5: Geraden in der Ebene

Wir betrachten n Geraden in der Ebene, von denen keine zwei parallel sind und keine drei sich in einem gemeinsamen Punkt schneiden.

Zeigen Sie, dass die Ebene von den Geraden in $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ Gebiete zerlegt wird.

$\ast$ Aufgabe 1.6: Ebenen im Raum

Können Sie das Problem aus der vorangegangenen Aufgabe auch im dreidimensionalen Raum lösen, also bestimmen, in wieviele Gebiete $\mathbb{R}^3$ von n Ebenen zerlegt wird, von denen keine zwei parallel sind, keine drei sich in einer gemeinsamen Geraden schneiden, und keine vier in einem gemeinsamen Punkt?