Abzählende Kombinatorik II

→ betrachten Abbildungen

$$f: K \to N \quad , \ |K| = k \ , \ |N| = n$$

für K, N (nicht) unterscheidbar
f beliebig, surjektiv, injektiv

→ zwölf mögliche Kombinationen.
davon haben wir schon acht bestimmt:

K	N	beliebig (f)	injektiv (f)	surjektiv (f)
u	u	n^k	$n^{\underline{k}}$	$T(k,n)$
uu	u	$\binom{n+k-1}{n-1}$	$\binom{n}{k}$	$\binom{k-1}{n-1}$
u	uu	(6)	$\begin{cases} 1 & n \geq k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	(5)
uu	uu	(3)	$\begin{cases} 1 & n \geq k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	(4)

und $$T(k,n) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} (n-m)^k$$

L2

(3), (4) entsprechen der Position von
k gleichen Objekten in
- genau $\rightarrow p_n(k)$
- höchstens $\rightarrow \overline{p}_n(k)$

n Teilungen

Dann: $p_n(k) = \overline{p}_n(k-n)$

$\overline{p}_n(k) = p_n(k+n)$

$\rightarrow$ weitere Überlegungen brauchen Erzeugendenfunktionen

$\rightarrow$ nächstes Kapitel

(5) K unterscheidbar, N nicht, f surjektiv

$\rightarrow$ kennen Antwort, wenn N unterscheidbar:
$T(k,n)$

$\rightarrow$ wenn N nicht unterscheidbar, dann zählen
wir jede Abbildung $n!$ mal

$\Rightarrow$ es gibt $\frac{1}{n!} T(k,n) =: S(k,n)$ Möglichkeiten

$S(k,n)$ sind die <u>Stirlingzahlen der zweiten Art</u>

$$\rightarrow S(k,n) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j (n-j)^k$$

$S(k,n) \hat{=}$ Anzahl Möglichkeiten, k Elemente in n nichtleere Teilmengen zu zerlegen

$\hat{=}$ Partitionen einer k-Menge in n Teile

Prop: $S(k,n)$ erfüllt

$$S(k,n) = n\,S(k-1,n) + S(k-1,n-1)$$

⌈ Übung ⌋

Prop: Für alle $m,x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

$$m^k = \sum_{n=0}^{k} \binom{m}{n} n!\; S(k,n) = \sum_{n=0}^{k} S(k,n)\, m^{\underline{n}}$$

⌈ Abbildungen $g: [k] \to [m]$ auf zwei Arten zählen:

(1) für jedes $a \in [k]$ gibt es m mögliche Bilder

$\to$ unabhängige Ereignisse

$\to$ es gibt m^k Abbildungen

(2) g ist surjektiv auf sein Bild $B \subseteq [m]$

für $|B| = n$: g definiert Partition der n-Menge B in k nichtleere Teile

$\Rightarrow$ es gibt $n!\,S(k,n)$ surjektive Abbildungen
$[k] \to B$

$\to$ es gibt $\binom{m}{n}$ Mengen B der Größe n in $[m]$

$\Rightarrow$ es gibt $\sum_{n=0}^{k} \binom{m}{n} n!\, S(k,n)$
Abbildungen $[k] \to [m]$ $\lrcorner$

(6) f nicht surjektiv:

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} S(k,j)$ Möglichkeiten

Spezialfall $n = k$

$B(k) := \sum_{j=1}^{k} S(k,j)$ <u>Bell-Zahl</u>

$\hat{=}$ Anzahl Möglichkeiten, K in Teilmengen zu zerlegen (K zu <u>partitionieren</u>)

$\to$ damit haben wir alle zwölf Zählaufgaben betrachtet

$\to$ Partitionen $p_n(k), \bar{p}_n(k)$ müssen wir noch einmal aufgreifen

K	N	beliebig	injektiv	surjektiv
u	u	n^k	$n^{\underline{k}}$	$n!\,S(k,n)$
nu	u	$\binom{n+k-1}{n-1}$	$\binom{n}{k}$	$\binom{k-1}{n-1}$
u	nu	$\sum_{j=1}^{n} S(k,j)$	$\begin{cases} 1 & n \geq k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$S(k,n)$
nu	nu	$p_n(k+n)$	$\begin{cases} 1 & n \geq k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$p_n(k)$

<u>Spezialfall Permutationen:</u>

$\hat{=}$ injektive Abbildung $\pi : N \to N$
(oft auch σ für Permutationen)

S_n := Menge aller Permutationen von $[n]$
(allgemeiner: einer n-Menge)

$|S_n| = n!$

S_n mit Hintereinanderschaltung ist Gruppe:

- $\sigma \circ \tau \in S_n$ für $\sigma, \tau \in S_n$
- $\sigma \circ \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ \sigma$ für $\mathrm{id} : k \mapsto k$
- zu σ gibt es τ : $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma = \mathrm{id}$.

Notation für Permutationen:

σ:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	7	4	1	6	9	2	8	5

oder kurz

$$3\ 7\ 4\ 1\ 6\ 9\ 2\ 8\ 5$$

oder

$$(1\,3\,4)(2\,7)(5\,6\,9)(8)$$

$$\left(\text{oder } (1\,3\,4)(2\,7)(5\,6\,8)\right)$$

Zykelschreibweise

Inverse: $(1\,4\,3)(2\,7)(5\,9\,6)(8)$

Verknüpfung

$$(1\,3\,4)(2\,7)(5\,6\,9) \circ (1\,7\,9)(2\,3\,4\,8)$$
$$= (1\,2\,4\,8\,7\,5\,6\,9\,3)$$

$\to$ Anzahl Permutationen mit k Zykeln:

$$c(n,k) := \left|\{\pi \in S_n \mid \pi \text{ hat } k \text{ Zykel}\}\right|$$

$c(0,0) = 1 \qquad c(n,k) = 0 \quad n \leq 0$ oder $k \leq 0$ aber $(n,k) \neq 0$

$c(1,1) = c(2,1) = c(2,2) = c(n,n) = 1$

$c(3,2) = 3$

$c(n,1) = (n-1)!$ ($\hat{=}$ Permutation, die mit 1 beginnt)

<u>Prop</u> $c(n,k) = c(n-1,k-1) + (n-1)\,c(n-1,k)$

[$\pi(n) = n$, oder wir können Permutation von $n-1$ Elementen an $n-1$ Stellen um n erweitern]

<u>Prop</u> $n \geq 0$, Dann

$$x^{\overline{n}} := x(x+1)\dots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} c(n,k)\,x^k$$

<u>aufsteigende Fakultät</u>

[Setze $x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} b(n,k)\,x^k$

Wir zeigen: b, c haben gleiche Anfangswerte und Rekursionsgleichung

$n=0$: $x^{\overline{0}} = x = \sum_{k=0}^{0} b(0,k)\,x^k = b(0,0)$

$\Rightarrow b(0,0) = 1$

Setze $b(n,k) = 0$ für $n \leq 0$ oder $k \leq 0$,
$(n,k) \neq (0,0)$

Dann gilt für $n \geq 1$

$$x^{\overline{n}} = (x+n-1)\, x^{\overline{n-1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b(n-1,k-1)\, x^k + (n-1) \sum_{k=0}^{n-1} b(n-1,k)\, x^k$$

$$\Rightarrow b(n,k) = b(n-1,k-1) + (n-1)\, b(n-1,k)$$

<u>Kor 6</u>
$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} c(n,k)\, x^k$$

Setze $-x$ in Prop

$$(-x)^{\overline{n}} = (-x)(-x+1)(-x+2)\cdots(-x+n-1)$$
$$= (-1)^n x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$$

$$\sum_{k=0}^{n} c(n,k)(-x)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k c(n,k)\, x^k$$

Wir setzen: $s(n,k) := (-1)^{n-k} c(n,k)$

<u>Stirlingzahlen der ersten Art</u>

<u>Kor 6</u>:
$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\, x^k$$

☒