Diskrete Mathematik

Andreas Paffenholz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WiSe 2022/23
27. Oktober 2022
Aufgabenblatt 2

Aufgaben mit (!) sind möglicherweise deutlich schwieriger.

Aufgabe 2.1: Partitionen

Wir betrachten Möglichkeiten, eine natürliche Zahl als Summe anderer natürlicher Zahlen zu schreiben. Dabei dürfen Summanden mehrfach vorkommen, und die Reihenfolge wollen wir nicht berücksichtigen.

Sei dann $p_u(n)$ die Anzahl der Möglichkeiten, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ als Summe ungerader Zahlen zu schreiben, und $p_e(n)$ die Anzahl, wenn alle Summanden verschieden sein sollen. Für $n = 6$ ergeben sich damit zum Beispiel jeweils die vier Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} 6 &= 1+1+1+1+1+1 = 1+1+1+3 = 1+5 = 3+3 \\ 6 &= 6 = 1+5 = 2+4 = 1+2+3\,. \end{aligned}$$

Betrachten Sie kleine Beispiele und stellen Sie eine Vermutung auf. Benutzen Sie das Prinzip der Inklusion-Exklusion, um diese Zahlen zu bestimmen und Ihre Vermutung zu beweisen.

Aufgabe 2.2: Stirling- und Bellzahlen

- Finden Sie einfache Formeln für $s(k,i)$, $s(k,k-i)$, $S(k,i)$ und $S(k,k-i)$ für $i = 1, 2$ (Sie können auch $i = 3$ versuchen).
- Zeigen Sie die Identitäten für die Stirlingzahlen zweiter Art und die Bellzahlen:

$$S(k+1, n+1) = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} S(m,n) \qquad\qquad B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(k)$$

(!) • Zeigen Sie

$$s(k+1, n+1) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i-n} \binom{i}{n} s(k,i)$$

Hinweis: Benutzen Sie die Darstellung von $x^{\underline{k+1}} = x \cdot (x-1)^{\underline{k}}$ als Summen mit den Stirlingzahlen als Koeffizienten und vergleichen Sie die Koeffizienten auf beiden Seiten.

(Es gibt auch einen kombinatorischen Beweis, wenn Sie die Stirlingzahlen durch $c(k,n)$ ersetzen, der jedoch deutlich schwieriger zu finden sein dürfte.)

Aufgabe 2.3: Auswahlen

- Wir betrachten Anordnungen der Zahlen von 1 bis n mit der Eigenschaft, dass für alle $k \in [n]$ entweder k an erster Stelle steht, oder mindestens eine der Zahlen $k-1$ oder $k+1$ vorher kommt. Zum Beispiel ist die Anordnung $(3, 2, 4, 5, 1)$ korrekt, während $(4, 5, 3, 1, 6, 2)$ nicht korrekt ist. Wieviele solche Anordnungen gibt es?
- Bestimmen Sie die Anzahl der Paare (K, M) von Teilmengen $K, M \subseteq [n]$ mit $K \subseteq M$.

Aufgabe 2.4: Rekursionen

Bestimmen Sie die Erzeugendenfunktionen und eine geschlossene Form für die Folgen

- $a_{n+1} := 3a_n + 2, \quad n \geq 0, a_0 = 0.$
- $a_{n+1} := 2a_n - a_{n-1}, \quad n \geq 0, a_0 = 0, a_1 = 1.$

∗ Aufgabe 2.5: Karos färben

Wir betrachten ein (4×7)-Kästchengitter, dessen Kästchen rot oder blau eingefärbt sind. Zeigen Sie, dass Sie darin immer ein Rechteck (mit Seitenlänge mindestens 2) finden können, dessen vier Eckfelder die gleiche Farbe haben.

Stimmt das auch für kleinere Kästchengitter?