Diskrete Mathematik

Andreas Paffenholz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WiSe 2022/23
03. November 2022
Aufgabenblatt 3

Aufgabe 3.1: Erzeugendenfunktionen

Bestimmen Sie Erzeugendenfunktionen (ohne unendliche Summe!) der Folgen (für $n \geq 0$)

$$a_n := \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad\qquad a_n := \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ 2^{(n+1)/2} & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 3.2: Würfel anordnen

Gegeben sind je zwei Bälle in n verschiedenen Farben.

Auf wieviele Weisen können Sie die $2n$ Bälle so anordnen, dass keine zwei Bälle gleicher Farbe nebeneinander liegen?

Hinweis: Inklusion-Exklusion

Aufgabe 3.3: Eulerzahlen

1. Ein *Anstieg* in einer Permutation $\sigma \in S_n$ ist ein i mit $\sigma(i+1) > \sigma(i)$. Die Permutation $(2\ 5\ 3\ 8\ 6\ 1\ 4\ 7)$ hat also 4 Anstiege. Wir bezeichnen mit $A_{n,k}$ die Anzahl der Permutationen einer n-Menge mit genau k Anstiegen. $A_{n,k}$ heißt *Eulerzahl*.
   Zeigen Sie die Rekursion $A_{n,k} \ = \ (n-k)A_{n-1,k-1} \ + \ (k+1)A_{n-1,k}$.
2. (!) Zeigen Sie

$$A_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n+1}{i} (k+1-i)^n \,.$$

Hinweis: Das geht mit der Methode der Inklusion-Exklusion. Überlegen Sie sich dazu, dass sie einer Permutation mit k Anstiegen eine Anordnung von $[n]$ zuordnen können, bei der k Striche zwischen den Paaren eines Anstiegs verteilt sind und die Zahlen zwischen zwei Strichen absteigend sortiert sind. Im Fall oben also 2 | 5 3 | 8 6 1 | 4 | 7.

Umgekehrt gehören nicht alle Anordnungen mit k Strichen in den $n+1$ möglichen Zwischenräumen (zeigen Sie: davon gibt es $(k+1)^n$) zu einer Permutation mit k Anstiegen, z.B. 2 || 5 3 | 8 7 6 | 4 1 oder | 8 7 ||| 6 5 4 3 2 1.

3. Eine *ansteigende Teilfolge* einer Permutation ist eine maximale Folge

$$\sigma(i) \ < \ \sigma(i+1) \ < \ \sigma(i+2) \ < \ \cdots \ < \ \sigma(i+k-1)$$

für $k \geq 1$. Die Permutation $(3\ 4\ 1\ 5\ 8\ 6\ 2\ 7\ )$ hat also 4 ansteigende Teilfolgen.
Zeigen Sie $f_{n,k} \ = \ A_{n,k-1}$ und $f_{n,k} = f_{n,n-k+1}$

Aufgabe 3.4: Partialsummen

Sei $A(x)$ die Erzeugendenfunktion einer Folge $(a_n)_{n\geq 0}$.

1. Zeigen Sie, dass dann

$$\frac{1}{1-x}A(x)$$

die Erzeugendenfunktion der Folge $(\sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\geq 0}$ der Partialsummen ist.
2. Verwenden Sie dieses Ergebnis, um für $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ die Summen

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \qquad\qquad \sum_{k=0}^{n} k^3 \qquad\qquad \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k}$$

zu bestimmen.

∗ Aufgabe 3.5: Fibonaccizahlen

Die Fibonaccizahlen sind durch die Rekursion $f_n := f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 2$ und $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ definiert.

1. Zeigen Sie, dass jede Zahl $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ Summe von Fibonaccizahlen ist.
2. Die *Lucaszahl* ist $L_n := f_{n-1} + f_{n+1}$. Zeigen Sie $f_{2n} = f_n L_n$.
3. Können Sie L_n als Ausdruck in $\varphi_\pm := \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ schreiben?

∗ Aufgabe 3.6: Vandermonde-Identität

Zeigen Sie

$$\binom{x+y}{n} \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k}.$$

Hinweis: Beweisen Sie das zuerst für $x, y \in \mathbb{Z}_{>0}$. Mit welchem Satz der Analysis können Sie dann den allgemeinen Fall folgern?