Diskrete Mathematik

Andreas Paffenholz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WiSe 2022/23
15. Dezember 2022
Aufgabenblatt 9

Aufgabe 9.1: Kreuzungszahl

Zeigen Sie, dass sich in jeder Zeichnung des K_n mindestens $\frac{1}{5}\binom{n}{4}$ Kantenpaare kreuzen müssen.

Aufgabe 9.2: Arragements

Seien n Geraden $g_1, \dots, g_n$ im $\mathbb{R}^2$ gegeben. Keine zwei Geraden sollen parallel sein, aber es dürfen sich mehrere Geraden in einem Punkt schneiden. Die Schnittpunkte der Geraden nennen wir *Knoten*, die Geradensegmente einer Gerade zwischen zwei aufeinanderfolgenden Knoten nennen wir *Kanten*. Wir erhalten also einen ebenen Graphen, der $2n$ unendliche Halbgeraden hat. Die Zusammenhangskomponenten des Komplements nennen wir wieder *Länder*. Sei m die Zahl der Knoten, k der Kanten und f der Länder.

Zwei Geraden ergeben also einen Knoten, vier Kanten und vier Länder. Drei Geraden ergeben einen Knoten sowie sechs Kanten und Länder, wenn die drei Geraden durch einen Punkt gehen, und drei Knoten, neun Kanten und sieben Länder andernfalls.

1. Zeigen Sie, dass $m - k + f = 1$.
2. Zeigen Sie, dass es höchstens n Länder gibt, die von genau zwei Kanten (die dann notwendig Halbgeraden sind) beschränkt werden.
3. Nehmen wir an, dass sich nicht alle Geraden im gleichen Punkt schneiden. Zeigen Sie, dass es einen Knoten gibt, in dem sich genau zwei der Geraden schneiden.

Bemerkung: Das ist eine duale Version zum Satz von Sylvester-Gallai aus der Vorlesung. Wenn wir annehmen, dass keine Gerade vertikal ist und kein Schnittpunkt im Ursprung ist, dann können wir die folgende Zuordung definieren:

a) Wenn (a, b) ein Knoten ist, dann nehmen wir als duale Gerade den Graph von $ax - b$.
b) Wenn das Bild von $mx - c$ eine Gerade ist, dann nehmen wir als dualen Punkt (m, c).

Dieses neue Arrangement dreht alle Inzidenzbeziehungen um und erfüllt die Bedingungen des Satzes von Sylvester-Gallai.

Wenn wir eine projektive statt einer affinen Ebene nehmen, dann brauchen wir die Einschränkung an das Arrangement nicht.

Aufgabe 9.3: Duale aufspannende Bäume

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender planarer Graph mit dualem Graph $G^* = (V^*, E^*)$. Wir haben eine Bijektion zwischen den Kanten von G und G^*, und wir bezeichnen die zu $e \in E$ duale Kante mit e^*.

Sei T ein aufspannender Baum von G und F die Menge der Kanten von G, die nicht in T enthalten sind. Zeigen Sie, dass $T^* = (V^*, F^*)$ für $F^* := \{e^* \mid e \in F\}$ ein aufspannender Baum von G^* ist.

Aufgabe 9.4: Gradfolgen

Sei $G = (V, E)$ ein 2-zusammenhängender planarer Graph mit n Knoten, k Kanten und f Ländern. Sei zudem n_i die Anzahl der Knoten vom Grad i und f_i die Anzahl der Länder mit i Kanten auf dem Rand, für $i \geq 1$.

Da G 2-zusammenhängend ist, wissen wir, dass jedes Land von einem Kreis im Graphen begrenzt wird, und auf den beiden Seiten einer Kante verschiedene Länder liegen. Alternativ können wir eine Kante im Rand eines Landes auch doppelt zählen, wenn auf beiden Seiten das gleiche Land liegt.

1. Zeigen Sie

$$2k \;=\; \sum_i i n_i \qquad\qquad 2k \;=\; \sum_i i f_i$$

2. Folgern Sie

$$\sum_i (i-2) f_i \;+\; 4 \;=\; \sum_i 2 n_i \qquad\qquad \sum_i (i-2) n_i \;+\; 4 \;=\; \sum_i 2 f_i$$

3. Folgern Sie, dass

$$\sum_i (6-i) n_i \;-\; 4 \;=\; 2 \sum_i (i-3) f_i \;+\; 8\,.$$

4. Folgern Sie, dass jeder 2-zusammenhängende planare Graph mindestens drei Knoten mit Grad höchstens 5 hat.
5. Folgern Sie, dass jeder 2-zusammenhängende planare Graph, bei dem jede Ecke mindestens Grad 5 hat, mindestens 12 Ecken hat. Können Sie einen Graphen angeben, bei dem jede Ecke Grad 5 hat? Eine unendliche Familie solcher Graphen?

$*$ Aufgabe 9.5: Mengensysteme mit Beschränkungen mod p

Sei p eine Primzahl und $F \subseteq 2^{[n]}$ eine Mengenfamilie mit der Eigenschaft, dass

1. $|A| \not\equiv 0 \mod p$ für alle $A \in F$
2. $|A \cap B| \equiv 0 \mod p$ für alle $A, B \in F$, $A \neq B$.

Zeigen Sie, dass $|F| \leq n$.

$*$ Aufgabe 9.6: Gerade Mengensysteme erweitern

Sei $F \subseteq 2^{[n]}$ eine Familie von Mengen, so dass $|A|$ und $|A \cap B|$ gerade ist für alle $A, B \in F$. Angenommen, $|F| < 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

1. Zeigen Sie, dass Sie zu F eine Menge hinzufügen können, ohne die Bedingungen zu verletzen.
2. Zeigen Sie, dass das nicht richtig ist, wenn Sie gerade durch ungerade ersetzen (Sie können dann maximale Konfigurationen der Größe $n - 2k$ finden, für jedes $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$).