10 Triangulierungen II

<u>Simplizialkomplex</u>: Δ Menge von k-Simplizes / k-Zellen $(0 \le k \le n)$ mit

- Seiten von Zellen sind in Δ
- Schnitte von Zellen sind Zellen.

$P \subseteq \mathbb{R}^n$, Δ ist <u>Triangulierung</u> von P

$\Leftrightarrow$ Δ ist Simplizialkomplex, $P = \bigcup_{S \in \Delta} S$

S Simplex mit Ecken $x_0, \dots, x_k$

$\Rightarrow$ $x \in S$ hat Darstellung $x = \sum \lambda_i x_i$, $\sum \lambda_i = 1$, $\lambda_i \ge 0$

$x \leftrightarrow (\lambda_0, \dots, \lambda_k)$ baryzentrische Koordinaten

$\ell(x) := \{ i \mid \lambda_i > 0 \}$

$\rightarrow$ $x \in \mathrm{conv}(x_i \mid i \in I) \Leftrightarrow \ell(v) \subseteq I$

S Simplex mit Ecken $x_0, \dots, x_n$,
Δ Triangulierung von S mit Ecken V.

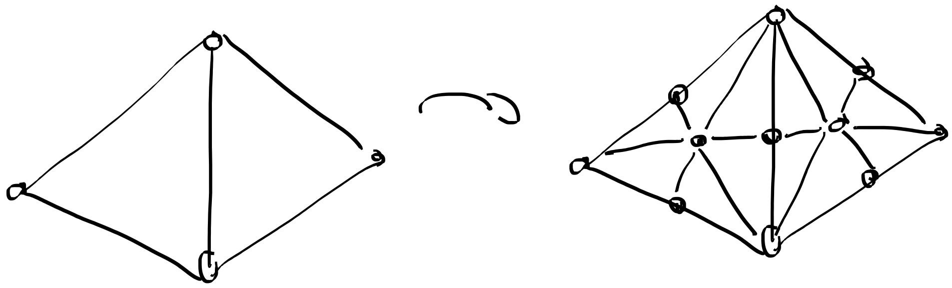
<u>Spernerfärbung</u>: $c : V \to \{0, \dots, n\}$ mit $c(v) \in \ell(v)$

<u>Regenbogenzelle</u>: n-Zelle in Δ, in der alle Ecken verschiedene Farben haben

<u>Spernerlemma</u> Jede Spernerfärbung hat eine ungerade Anzahl von Regenbogenzellen.

Baryzentrische Unterteilung von Δ:

- neue Ecke in Schwerpunkten der Seiten
- Kante zwischen Knoten inzidenter Seiten



Wir wollen das Spernerlemma zum Beweis eines topologischen Resultats nutzen:

<u>Satz</u> (Brouwersches Fixpunktsatz)

$B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ und $f: B^n \to B^n$ stetig

Dann gibt es $x \in B^n$ mit $f(x) = x$.

Γ B^n ist homöomorph zu n-Simplex

$S = \operatorname{conv}(e_0, \ldots, e_n) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

$\Rightarrow$ können stattdessen $f: S \to S$ betrachten.

$\to$ machen Widerspruchsbeweis

also: Annahme f hat keinen Fixpunkt

$\to T = T_0$ Triangulierung von S

$T_1, T_2, \ldots$ Folge von baryzentrischen Unterteilungen.

$\to$ max der Kantenlängen in T_m geht für $m \to \infty$ gegen 0

[Achtung: Das gilt nicht für alle Unterteilungen]

$\Rightarrow$ definiere Färbung von T_m

$$c_m : V(T_m) \to \{0, \dots, n\}$$

$$c_m(x) = \min(k \mid f(x)_k < x_k)$$

das ist wohldefiniert, da

$$f(x) \neq x \quad \text{und} \quad \sum x_i = \sum f(x_i) = 1$$

x in Seite von S.

$\to$ $x \in \operatorname{conv}(e_i \mid i \in I)$ für ein I

$\Leftrightarrow$ $x = \sum \lambda_j e_j$ und $\lambda_i = 0$ für $i \notin I$

$\Rightarrow$ $c_m(x) \in I$

$\Rightarrow$ $c_m(x) \in \{c_m(e_i) \mid i \in I\}$

Insbesondere: $c_m(e_i) = i$

$\to$ c_m ist Spernerfärbung von T_m für alle $m \geq 0$

$\to$ jedes T_m enthält eine Regenbogenzelle R_m

Setze: $x_{jm} :=$ Ecke von R_m mit Farbe j

S kompakt $\Rightarrow x^{j_m} \to x^{j*} \in S$

(ggf. nach Teilfolge)

Kantenlänge $\to 0 \Rightarrow x^{j*} = x^{l*} \ \forall j, l.$

$\to$ Setze $x^* = x^{j*}$ für ein j

nach Konstruktion: $f(x^*)_k < x_k \ \forall k$

Wenn $f(x^*) \neq x^*$ nach Annahme

$\Rightarrow$ für min. ein k: $f(x)_k > x^*_k$ ↯

$\to$ Faire Aufteilungen:

$\to$ rechteckigen Kuchen „fair" unter n Personen aufteilen

$\rightsquigarrow$ können auf Intervall $[0,1]$ projizieren

$\rightsquigarrow$ Bewertung durch n Wahrscheinlichkeitsmaße μ_k mit

$\mu_k(I) = 1, \quad \sum \mu_k(S_i) = \mu_k(\bigcup S_i)$

für paarweise disjunkte S_i

$t \mapsto \mu([0,t])$ stetig in t

$\Rightarrow \mu(\{t\}) = 0 \quad \forall t \in I$

$\rightarrow$ Partition: $A_k \subseteq I$, $A_k \cap A_j = \emptyset$ für $k \neq j$

$\bigcup A_k = I$

(A_k nicht notwendig zshgd.)

<u>Def</u> Partition $A_1, \dots, A_n$ heißt <u>fair</u>, wenn

$$\mu(A_k) \geq \frac{1}{n} \qquad \forall k$$

und <u>neidfrei</u>, wenn

$$\mu_k(A_k) \geq \mu_k(A_j) \quad \forall j.$$

<u>Prop</u> Es gibt eine faire Partition

⌈ Sei $t_1 := \min(x : \mu_k([0,x]) \geq \frac{1}{n}$ für ein $k)$

Sei k_1 ein k mit $\mu_{k_1}([0,t_1]) = \frac{1}{n}$

Setze $A_{k_1} = [0,t_1]$

Für alle anderen gilt $\mu_j([t_1,1]) \geq \frac{n-1}{n} \geq \frac{1}{n}$

$\rightarrow$ können

$t_2 := \min(x \mid \mu_k([t_1,t_2]) \geq \frac{1}{n}$ für ein $k \neq k_1)$

definieren. Wenn für k_2 angenommen, setze

$A_{k_2} := [t_1, t_2]$

für den Rest gilt $\mu_j([t_2,1]) \geq \frac{n-2}{n} \geq \frac{1}{n}$

$\rightsquigarrow$ können iterativ $A_1, \dots, A_n$ definieren ⌋

→ diese Aufteilung muss nicht neidfrei sein!

<u>Satz</u> Es gibt faire und neidfreie Aufteilung in Intervalle

⌈ Eine Aufteilung von $[0,1]$ in n Intervalle ist durch n Längen $t_1, \ldots, t_n$ definiert

→ dann: $t_i \geq 0$, $\sum t_i = 1$

$\Rightarrow t := (t_1, \ldots, t_n) \in S = \mathrm{conv}(e_1, \ldots, e_n)$

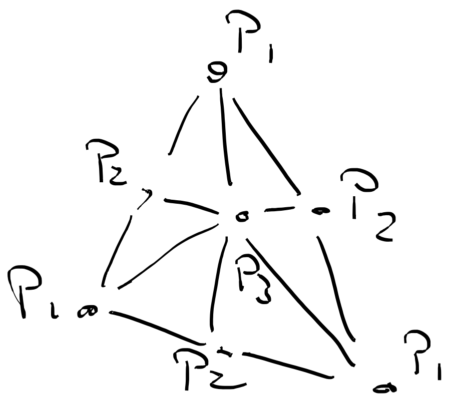
→ $(n-1)$-Simplex

Betrachte wieder Folge $T_1, T_2, \ldots$ von begrenzenderen Unterteilungen von S

→ können Ecken von T_m die Personen $p_1, \ldots, p_n$ zuweisen:

p_j zu Ecken, die in Unterteilung von T_{m-1} zu $(j-1)$-Zelle gehören,

→ jedes Simplex hat Ecken-label $p_1, \ldots, p_n$



Eine Ecke $t = (t_1, \ldots, t_n)$ Ecke von T_m

→ entspricht der Aufteilung

$[0, t_1] \cup [t_1, t_1 + t_2] \cup \ldots \cup [t_1 + \ldots + t_{n-1}, 1]$

$= I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n$

Wir definieren Abbildungen

$$\mu : V \to \mathbb{R}, \quad \lambda : V \to \{1, \dots, n\}$$

durch:

$$\mu(t) = \max\left(\mu_j(I_k) \mid 1 \le k \le n\right)$$

wenn j: Label der Ecke t ist

$$\lambda(t) = \min\left(k \mid \mu_j(I_k) = \mu(t)\right)$$

$\hat{=}$ kleinster Index, der das Max annimmt

$\hat{=}$ Positionsstück, dass sich die dieser Ecke zugeordnete Person j aussuchte ($\hat{=}$ für das größte Stück hält)

Setze $c_m(t) := \lambda(t)$.

$\to$ das ist Spernerfärbung:

$$t \in \operatorname{conv}(e_i \mid i \in I) \Rightarrow t_k = 0 \text{ für } k \notin I$$

$$\Rightarrow \mu_j(I_k) = 0 \text{ für } k \notin I$$

Da es I_ℓ mit $\mu_j(I_\ell) > 0$ geben muss, wird I_k für $k \notin I$ sicher nicht gewählt

$\Rightarrow T_m$ hat Regenbogenzelle R_m

$\Leftrightarrow$ Jede Person sucht sich an seiner Ecke ein Stück mit einem anderen Index aus

Erinnerung:

- Dass alle Personen vorkommen folgt aus unserem Labelling über die baryzentrische Unterteilung
- Die Regenbogenfärbung sagt, dass es zu jedem k eine Person gibt, die sich an ihrer Ecke für das k-te Stück entscheidet (es gibt eine mit k gefärbte Ecke)
- Die Positionen sind nicht gleich!

Durch Permutation der Stücke mit Permutation π_m können wir annehmen, dass Person j sich für Stück j entscheidet

Sei x^k Schwerpunkt von R_m

S kompakt $\Rightarrow x^k \to x^*$ (ggf. nach Teilfolge)

Nur endlich viele verschiedene Permutationen π_m

$\Rightarrow$ nach weiterer Teilfolge: π_m für alle R_m gleich.

Dann: Positionen an den Ecken konvergieren zu gleicher Position

Da Person j Stück j bevorzugt:

$\to$ erhalten neidfreie Aufteilung