12 Designs II

Def $v, k, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

Ein <u>t-Design</u> auf v Punkten mit <u>Blockgröße</u> k und <u>Index</u> λ oder <u>t-(v,k,λ)-Design</u> ist eine Inzidenzstruktur $D = (P, B, R)$ mit

- $|P| = v$
- $|b| = k$ für alle $b \in B$
- Für $T \subseteq P$, $|T| = t$ gibt es genau λ Blöcke $b_1, \dots, b_\lambda$ mit $p \in b_i \ \forall\, 1 \leq i \leq \lambda$, $p \in T$

Wir setzen $b := |B|$, die Anzahl der Blöcke.

$\to$ Frage: gegeben v, k, t, λ, gibt es ein t-(v,k,λ)-Design?

Bsp (1) $B = \{b\}$, $b = P$

$\to$ t-$(v,v,1)$-Design für $t \leq v$

(2) $\binom{P}{k}$ ist t-(v,k,λ)-Design für $t \leq k$, $\lambda = \binom{v-t}{k-t}$

Def Diese Designs heißen <u>triviale Designs</u>.

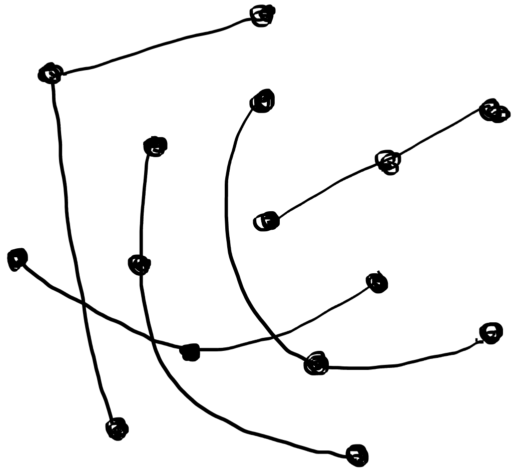
$\to$ gibt es andere?

$\to$ <u>Im Folgenden</u>: $v > k > t$.

Bsp (1) (Kirkman)

- 15 Schüler:innen in Dreiergruppen
- 7 Tage
- je 2 an genau einem Tag gemeinsam

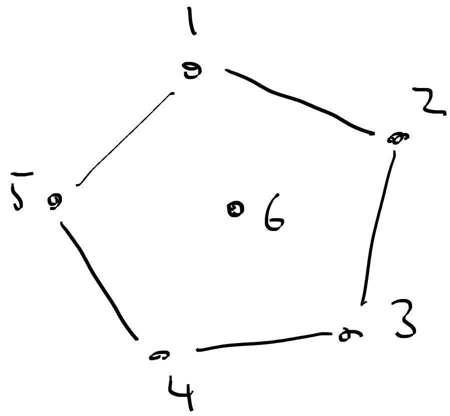
→ 2-(15,3,1)-Design
mit Zusatzbedingung, dass die 45 Blöcke in sieben Teile zu je fünf Blöcken partitioniert werden können.



(2) Alle 3-Tupel, die genau eine Kante enthalten:

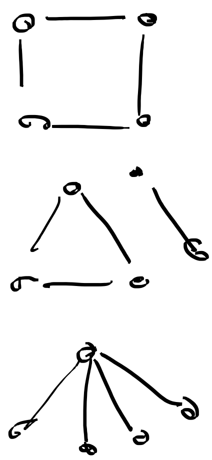
124, 126, 235, 236, ...

→ 2-(6,3,2)-Design



(3) P = Kanten des K_5

B = alle Konfigurationen der Form:



$|B| = 30$ und wir haben ein

3-(10,4,1)-Design

→ Welche Tupel v, k, λ, t können wir ausschliessen?
Welche können wir konstruieren?

<u>Lemma</u> D t-(v,k,λ)-Design. Dann

$$b\binom{k}{t} = \lambda\binom{v}{t} \quad \text{bzw} \quad b = \lambda \binom{v}{t} \Big/ \binom{k}{t} \qquad (*)$$

⌈Doppeltes Abzählen von Paaren
(T, b) für $b \in B$, $|T| = t$, $T \subseteq b$
• über T: $\lambda\binom{v}{t}$, über b: $b\binom{k}{t}$ ⌋

<u>Lemma</u> $1 \le i \le t$, $S \subseteq P$, $|S| = i$
$b_i :=$ Anzahl $b \in B$ mit $S \subseteq b$
Dann:
$$b_i\binom{k-i}{t-i} = \lambda\binom{v-i}{t-i} \qquad (**)$$

⌈analog zum Lemma davor⌋

<u>Kor</u> Jedes t-(v,k,λ)-Design ist auch i-(v,k,b_i)-Design

⌈ b_i hängt nur von i, nicht von S ab ⌋

<u>Bsp</u>: (3) von oben ist auch
2-$(16,4,4)$-Design

<u>Def</u> $r := p_1$ heißt <u>Wiederholungszahl</u>

<u>Koro</u> $t = 2$: $\lambda(v-1) = r(k-1)$, $bk = vr$,

<u>Satz</u> (Fisher) $\lambda = 1$, D nicht trivial, dann
$$v \geq (t+1)(k-t+1)$$

$\ulcorner$ $\lambda = 1 \Rightarrow |b_1 \cap b_2| \leq t-1$ für alle $b_1, b_2 \in B$

D nicht trivial $\Rightarrow$ können S, $|S| = t+1$ wählen, das in keinem Block enthalten ist.

$\rightarrow$ zu jedem $T \subseteq S$, $|T| = t$ gibt es ein eindeutiges $b_T \in B$ mit $T \subseteq b$

$\rightarrow b_T$ hat $k-t$ weitere Elemente

$\rightarrow$ Für $T_i \subseteq S$, $|T_i| = t$, $i = 1,2$, $T_1 \neq T_2$ gilt $|b_{T_1} \cap b_{T_2}| = t-1$

$\Rightarrow$ jedes $p \in P \setminus S$ ist in höchstens einem b_T

$\Rightarrow v \geq |S| + (t+1)(k-t)$

$= (t+1)(k-t+1)$ $\lrcorner$

Bsp: $v = 72,\ k = 16,\ \lambda = 1,\ t = 10$

$$b = \lambda \frac{\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}} = \frac{\binom{72}{10}}{\binom{16}{10}} = 66.959.532$$

ebenso $b_i = \lambda \frac{\binom{v-i}{t-i}}{\binom{k-i}{t-i}} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ für alle i

aber:
$(10+1)(16-10+1) = 77 > 72 \Rightarrow$ es gibt kein $10-(72,16,1)$-Design

Erinnerung: Fisher-Ungleichung:
$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$, $|A \cap B| = k$ für alle $A, B \in \mathcal{F}$, $A \neq B$

Dann: $|\mathcal{F}| \leq n$

Kor (Fisher-Ungleichung)
D $2-(v,k,\lambda)$-Design. Dann $b \geq v$

$\ulcorner$ $\mathcal{B}_p := \{ b \in \mathcal{B} \mid p \in \mathcal{B} \}$ für $p \in P$

$\mathcal{F} := \{ \mathcal{B}_p \mid p \in P \} \subseteq 2^{\mathcal{B}}$, $|\mathcal{F}| = v$

$|\mathcal{B}_p \cap \mathcal{B}_{p'}| = \lambda$

$\Rightarrow v \leq |\mathcal{B}| = b$ $\lrcorner$

Bsp Es gibt kein $2-(16,6,1)$-Design
obwohl $(*), (**)$ erfüllt:
$$b = \lambda \binom{v}{2} / \binom{k}{2} = \frac{15 \cdot 8}{3 \cdot 5} = 8 < 16$$