14 Probabilistische Methoden

Bsp Karten mischen: 52 Karten,

Methode: Stapel halbieren, ineinandermischen

$\to$ einmal mischen:

können $\binom{52}{26}$ neue Stapel erreichen

(Positionen von einer Seite!)

$\Rightarrow$ viermal mischen:

$\leq \binom{52}{26}^4$ Variationen erreichbar.

wegen $\binom{52}{26}^4 < 52!$ ist nicht jede

Permutation erreichbar

$\binom{52}{26}^5 > 52!$, aber gleichverteilt?

Def (Ω, P) endlicher <u>Wahrscheinlichkeitsraum</u>:

- Ω endliche Menge, <u>Ereignisraum</u>
- $P : \Omega \to \mathbb{R}$ <u>Maß</u> mit

$P(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$

$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$

Def $A \subseteq \Omega$ heißt Ereignis

→ setzen $P(A) := \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega)$

→ können P zu Abb. $P : 2^{\Omega} \to \mathbb{R}$ erweitern, mit $P(\Omega) = 1$

→ dann: A, B disjunkt $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Lemma $A_1, \ldots, A_k$ Ereignisse, dann

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_k) \leq \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$$

Bsp n-facher Münzwurf:

$$\Omega = \{K, Z\}^n, \quad P(\omega) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n$$

Def A Ereignis, dann heißt $\bar{A} := \Omega \setminus A$ **Komplementärereignis**

Def Ereignisse A, B heißen unabhängig, wenn

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Prop: A, B unabhängig $\Rightarrow A, \bar{B}$ unabhängig

$$\ulcorner\, P(A \cap \bar{B}) = P(\overline{\bar{A} \cup B}) = 1 - P(\bar{A} \cup B)$$

$$= 1 - P(\bar{A}) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B)$$

$$= P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B}) \quad \lrcorner$$

Def B Ereignis mit $P(B)>0$
A Ereignis. Dann heißt

$$P(A|B) := \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

bedingte Wahrscheinlichkeit für „A gegeben B"

$\to P(\cdot|B)$ ist wieder Wahrscheinlichkeitsmaß.

Bsp: (1) A,B unabhängig, dann $P(A|B)=P(A)$
(2) A,B,C Ereignisse, $P(B\cap C), P(C)>0$
Dann:

$$P(A|B\cap C) = \frac{P(A\cap B|C)}{P(B|C)}$$

(3) $P(A\cap B\cap C) = P(A|B\cap C)P(B|C)P(C)$

$\boxed{\Xi}$

$\to \mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ Mengensystem

Def $\mathcal{F}$ heißt <u>2-färbbar</u>
$\iff$ es gibt $\chi: [n] \to \{0,1\}$ so dass es in jedem $A \in \mathcal{F}$ Elemente $a,a' \in A$ gibt mit $\chi(a) \neq \chi(a')$
$\iff$ kein $A\in\mathcal{F}$ ist monochromatisch.

Bsp: A 12.1: Fanoebene ist nicht 2-färbbar
[Färbe Punkte nacheinander rot bis jede Gerade roten Punkt hat:

→ erster roter Punkt r_1 deckt drei Geraden ab.

→ zweiter Punkt r_2 deckt nur noch zwei ab, da r_1, r_2 auf gemeinsamer Gerade.

→ dritter Punkt r_3: nur noch eine Gerade, da r_1, r_3 auf Gerade g, r_2, r_3 auf Gerade g' und $g \neq g'$

⇒ brauchen vierten roten Punkt

ebenso ≥ 4 blaue, ⇒ brauchen ≥ 8 Punkte ↯

Sei $\mathcal{F}$ r-uniform.

Def $m(r) := \min \left(k \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt } r\text{-uniformes } \mathcal{F},\ |\mathcal{F}| = k \\ \mathcal{F} \text{ nicht zweifärbbar} \end{array} \right)$

Schranke existiert: $n \geq 2r-1 \to m(r) \leq \binom{2r-1}{r}$

Satz $m(r) \geq 2^{r-1}$

$\mathcal{F}$ Mengenfamilie, $|\mathcal{F}| < 2^{r-1}$.

Färbe zufällig mit $p = \frac{1}{2}$ für jede Farbe

$\to \quad P(A \text{ monochromatisch}) = \frac{1}{2^r} + \frac{1}{2^r} = \frac{1}{2^{r-1}}$

$\Rightarrow P(\text{es gibt monochromatisches } A)$

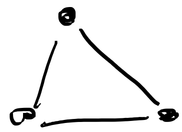
$$\leq \sum_{A \in \mathcal{F}} P(A \text{ monochromatisch})$$

$$\leq |\mathcal{F}| \cdot \frac{1}{2^{r-1}} < 1$$

⇒ es muss Färbung geben, die nicht monochromatisch ist.

→ gute Schranke?

$m(2) = 3$



$m(3) \geq 4$

→ Fanoebene: $m(3) \leq 7$

Prop $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$, $n \leq 6$, $|\mathcal{F}| \leq 6$

Dann ist $\mathcal{F}$ 2-färbbar.

können $n = 6$ annehmen

färben zufällig 3 rot, 3 blau

→ $\binom{6}{3} = 20$ Möglichkeiten

$P(A \text{ monochrom}) = \frac{1}{10}$

$\Rightarrow P(\mathcal{F} \text{ enthält monochromes } A) \leq \frac{6}{10} < 1$

$\Rightarrow$ es gibt 2-Färbung

Prop: $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$, $n > 6$, $|\mathcal{F}| \leq 6 \Rightarrow \mathcal{F}$ 2-färbbar

es gibt $x, y \in [n]$: $|A \cap \{x,y\}| = 1 \ \forall A \in \mathcal{F}$:

es gibt max 18 Paare, die in einem $A \in \mathcal{F}$ liegen,

aber ≥ 21 Paare in $[n]$

→ wir können x mit y identifizieren ohne 2-Färbbarkeit zu ändern

Kor: $m(3) = 7$

Bem: $m(4)$ ist unbekannt.

→ Turnier, jeder gegen jeden
  V: Menge der Teilnehmer:innen
  → Gewinner?
    → klar, wenn einer gegen alle gewonnen hat
  → sonst: Gewinnermenge
    $X \subseteq V$: $\forall y \in V \setminus X$ gibt es $x \in X$: x hat gegen y gewonnen
    $\Leftrightarrow$ kein $y \in V \setminus X$ hat gegen alle $x \in X$ gewonnen.

→ gibt es immer Gewinnermenge der Größe k, für ein $k < n$?

→ kann als Graph modelliert werden:
  K_n, mit gerichteten Kanten (x,y), wenn x gegen y gewonnen hat.
  → solche Graphen heißen Turniere
→ dann: gibt es zu $1 \leq k < n$ ein $X \subseteq V$, $|X| = k$
  so dass es kein y gibt mit $(y,x) \in E$ $\forall x \in X$.

Satz Sei $1 \leq k < n$.
Dann gibt es Turniere, so dass es zu jedem $X \subseteq V$, $|X| = k$ ein $y \in V \setminus X$ gibt mit $(y,x) \in E$ für alle $x \in X$

$\ulcorner$ → reicht, das für große k zu zeigen
k fest gewählt, $n := k + k^2 2^k$
→ orientieren Kanten des K_n zufällig, mit $p = \frac{1}{2}$
Sei $X \subseteq V$, $|X| = k$, $y \in V \setminus X$

Dann: $P(\forall x \in X : y \to x) = \frac{1}{2^k}$

$\Rightarrow$ $P(\text{es gibt } x \in X : x \to y) = 1 - \frac{1}{2^k}$

$y, y' \in V \setminus X$, $y \neq y'$,
→ Ereignisse „$\forall x \in X : y \to x$" und „$\forall x \in X : y' \to x$" sind unabhängig (Kantenmenge ist disjunkt)

$$\Rightarrow P(\forall y \in V \setminus X \text{ gibt es } x \in X : x \to y) = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-k}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{2^k k^2} = \left(\left(1 + \frac{-1}{2^k}\right)^{2^k}\right)^{k^2} \leq (e^{-1})^{k^2}$$

$$\leq e^{-k^2}$$

$$\Rightarrow P(\text{es gibt } X : (\text{es gibt kein } y \in V(X) : y \to x \ \forall x))$$

$$\leq \binom{n}{k} e^{-k^2} = \binom{k + 2^k k^2}{k} e^{-k^2} \leq (k^2 2^k)^k e^{-k^2}$$

$$= \left(\frac{k^2 2^k}{e^k}\right)^k$$ → für k groß ist das < 1 $\lrcorner$